# 消去隐藏线的直线立体图形绘制

高品忱

摘要：本文详细地叙述了直线三维立体图形在二维平面上的表示方法，绘制立体图形的投影变换公式，数据结构，消去隐藏线的算法及实际例图。文中设计了一种非常简单的数据关系表，这种方法容易掌握，编程简单。特别是对消隐方法的讨论，层次清楚，简单明了。

## 一、变换与投影

构成一个立体图形的元素是点、线、面等，点构成线，线构成面，面构成体。在计算机内表示一个图形可以看作是图形元素的集合，其基本元素是点的三维坐标（$X$、$Y$、$Z$），而图形的输出是把三维图形显示或绘制在二维平面上，可见绘制立体图形就是在二维平面上绘图具有立体感的图形，因此在二维平面上绘制立体图使用的量是二维坐标（$X$，$Y$）。这样，就要把三维立体图形经过平行投影或透视投影变换投影到二维平面上。

### 1. 变　换

在考虑三维变换中，我们采用齐次坐标，以便适合于变换。所谓齐次坐标就是用四维向量表示三维位置向量。在三维空间中，位置向量$P$（$x, y, z$）用四维向量$P$（$x$，$y$，$z$，$H$）来表示，外加分量$H$的作用如同增加一个附加坐标，显然正则坐标与齐次坐标的关系为：

$$x=\frac{X}{H}\quad,\qquad y=\frac{Y}{H}\quad,\qquad z=\frac{Z}{H} \tag{1}$$

采用齐次坐标的好处在于它提供了一个三维空间中包括平移、旋转、透视、反射、错切、投影和比例变换等在内的变换的统一表达式，即4×4变换矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a & c & g & j \\ d & b & h & k \\ e & f & i & t \\ m & n & l & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R & K \\ & \\ T & S \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中3×3子阵$R$产生定比例、切变和旋转等线性变换；1×3子矩阵$T$产生平移；3×1子矩阵$K$产生透视变换；1×1子矩阵$S$产生总的定比例变换[2]。

### 2. 投　影

三维空间到二维空间的投影变换是平行投影和透视投影。

(1) 平行投影

所谓平行投影是假定视点在无穹远看空间物体在某个平面上的投影，即空间物体各点与投影平面上对应点的连线均平行，如图1。

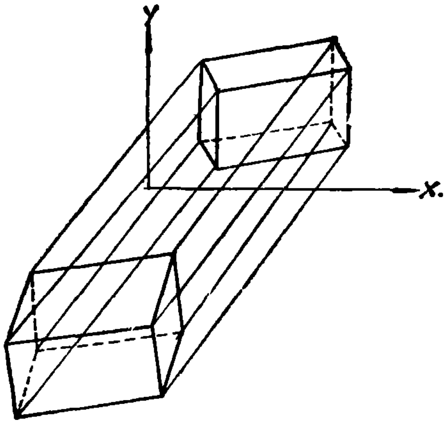



图1 平行投影

令平行投影轴的方向余弦分别为$C_x$，$C_y$，$C_z$，若投影平面为$xoy$平面，则

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{C_x}{C_z} & -\frac{C_y}{C_z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

投影后的绘图坐标

$$x^* = X/H \quad , \quad y^* = Y/H$$

若投影平面为 $xoz$ 平面，则

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_x}{C_y} & 1 & -\frac{C_z}{C_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

投影后的绘图坐标

$$x^* = X/H \quad , \quad z^* = Z/H$$

若投影平面为 $yoz$ 平面，则

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_y}{C_x} & -\frac{C_z}{C_x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

投影后的绘图坐标

$y^* = Y/H \quad , \quad z^* = Z/H$

当投影平面不是上述的投影平面时、可以经过坐标平移和旋转化为该平面。

(2) 透视投影

所谓透视投影，就是从距物体有限距离的视点去看空间物体在某个平面上的投影。例如，若投影于 $xoy$ 平面。空间物体是由空间点组成的，从视点 $(x_p, y_p, z_p)$ 出发，看任意一点在 $xoy$ 平面上的投影就是视点和空间点的连线与 $xoy$ 平面的交点，即

$$\begin{cases} \dfrac{x^* - x_p}{x - x_p} = \dfrac{y^* - y_p}{y - y_p} = \dfrac{z^* - z_p}{z - z_p} \\ z^* = 0 \end{cases} \tag{6}$$

解之得

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{xz_p - zx_p}{z_p - z} \\ y^* = \dfrac{yz_p - zy_p}{z_p - z} \end{cases} \tag{7}$$

写为矩阵形式为

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1) \begin{pmatrix} z_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_p & 0 & 0 \\ -x_p & -y_p & z_p & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z_p \end{pmatrix} \tag{8}$$

投影后的坐标

$x^* = X/H \quad , \quad y^* = Y/H$

类似地可以写出往 $xoz$ 平面透视投影变换公式

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1) \begin{pmatrix} y_p & 0 & 0 & 0 \\ -x_p & y_p & -z_p & -1 \\ 0 & 0 & y_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_p \end{pmatrix}$$

投影后的坐标

$x^* = X/H \quad , \quad z^* = Z/H$

往 $yoz$ 平面的透视投影变换公式为

$$(X\ Y\ Z\ H) = (x\ y\ z\ 1) \begin{pmatrix} y_p & -y_p & -z_p & -1 \\ 0 & x_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_p \end{pmatrix}$$

投影后的坐标

$$y^{*}=Y/H \quad , \quad z^{*}=Z/H$$

有了上述公式就不难获得一个物体的立体图。因为，只要空间点（$x, y, z$）按一定的规律运动起来就能构成线、面、体。相应地经过投影变换，它的投影像也就形成了一个立体图。

## 二、数据结构

由于在计算机内存贮的是数据，因此在计算机内表示一个图形可以用一个数据集合表示，这个集合是一些图形元素的集合。点、线、面都是图形元素、其基本元素是点的坐标值（$x, y, z$），由点构成线，线构成面，面构成体。在数据结构中，首先要把表示立体图形的元素按一定规则存放在计算机中，这个规则就是使图形元素的集合成为一个有序的集合。

然而计算机的图形输出与在计算机内构成的几何模型是不同的，后者提供一个对应于一个三维物体的完整的计算机内部表示，前者只是三维物体的不完整的表示。在图形输出时，需要从完整的图形元素集合中检出绘图所需的数据，也要按一定的规则来检。

上述的有序集合如何构造和如何检出绘图数据，这些就是所谓的立体图形的数据结构。以一个正六面体为例进行说明之。

将正六面体的八个顶点按从下至上，逆时针方向来编号，如图 2 所示，并给出相应的三维坐标：

| 编号 | 坐标 | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
| 2 | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
| 3 | $x_3$ | $y_3$ | $z_3$ |
| 4 | $x_4$ | $y_4$ | $z_4$ |
| 5 | $x_5$ | $y_5$ | $z_5$ |
| 6 | $x_6$ | $y_6$ | $z_6$ |
| 7 | $x_7$ | $y_7$ | $z_7$ |
| 8 | $x_8$ | $y_8$ | $z_8$ |

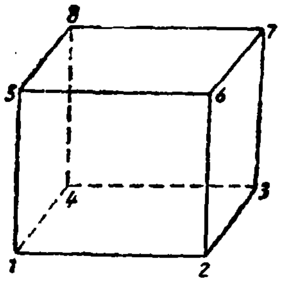


图 2　正六面体

绘图时设定从 1 点开始画，首先要画 1－2，1－4，1－5 线段；然后画 2－3，2－6 线段；再依次画 3－4，3－7；4－8；5－6，5－8；6－7；7－8，共12条线段。也就是绘图笔从 1 点开始画与 1 相连的线段，全部画完后，抬笔走到 2 的位置，再画与 2 相连的全部线段（2－1 不画），画完后抬笔走到 3 的位置，再画与 3 相连的全部线段（3－2 不画），…，最后抬笔走到 7 的位置，画与 7 相连的全部线段（7－3，7－6 不画）。从以上可以看出，抬笔走到 $m$ 点位置后，所画的与 $m$ 相连的点 $n$ 间的线段，总是 $m<n$。上述的绘图顺序可以写成如下关系表：

| ① → | ② → | ③ → | ④ → | ⑤ → | ⑥ → | ⑦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 4 5 | 3 6 | 4 7 | 8 | 6 8 | 7 | 8 |

排成顺序数列：

①2 4 5②3 6③4 7④8⑤6 8⑥7⑦8

分析上述数列，有如下规律：

$a$。m是按自然数列①②③…排列，直到总点数减 1 为止。

$b$。m后边的数列是递增的。

$c$。m后边的数均大于$m$。

$d$。m前边的一个数大于或等于$m$。

这就是所谓的立体图点列关系表

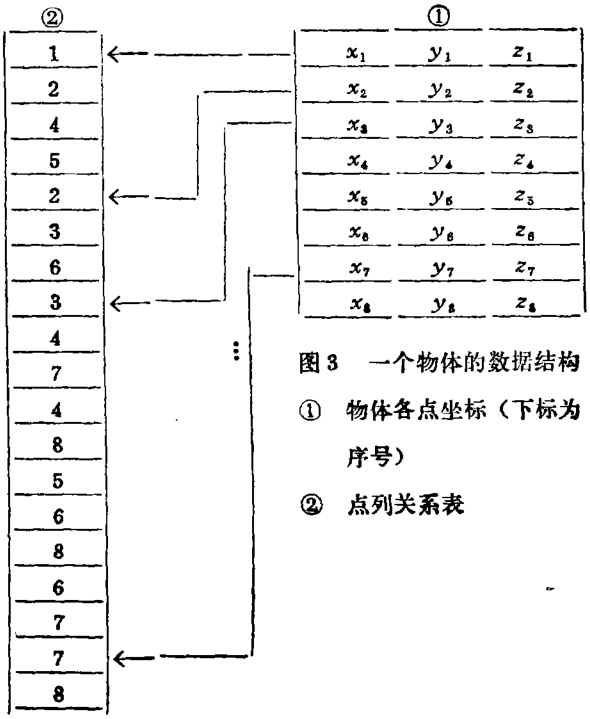



图 3　一个物体的数据结构

① 物体各点坐标（下标为序号）

② 点列关系表

绘制物体的立体投影图必须生成上述的二个表。不管用何种方式，手工的或程序自动生成均可。

## 三、消除隐藏线的算法

我们这里讨论的是由多面体、平面多边形和直线段组成的物体。绘制这类物体的立体图只要将物体的所有棱边的两个端点经过投影变换公式求出其像点，把这两个像点连接起来就是原棱边经过投影变换后的像。所以绘制不消隐的立体图是不困难的，困难的是如何从这些线段中检出隐藏部分。正因为如此，所以立体透视图的绘制必须在检出隐藏线的计算之后才能进行。

下面我们按通常的习惯，用平行于$z$轴的投影方向往$xoy$平面作平行投影。因为，如果不是平行于$z$轴的投影，可通过旋转变换转化为该种情形。而用平行于$x$轴的投影或平行于$y$轴的投影，与这种情形同样处理，只是平行投影的变换公式不一样而已。

这里讨论的是最终要画的线段而不是曲面，因此在下面的算法中把物体解体为一系列的

棱边和线段。把物体的所有棱边和线段收集起来，形成的数据集合，称为线段表。而所有的棱边的集合称为棱边表。棱边表包括了构成物体的所有轮廓线。

这里讨论的由这些棱边组成的物体是凸的多面体或由凸的平面多边形组成的物体。一般的物体可看成是由若干个凸多面体组成。

所谓隐藏线就是用眼睛看一个不透明的物体时，看不见的棱边或线段，这些看不见的棱边和线段是由物体把它们遮住造成的。所以要消除隐藏线就是把物体和线段表中所有的线段进行比较，找出整个被遮挡的线段和部分被遮挡的线段。整个被遮挡的线段就从线段表中消去，部分被遮挡的线段就用一段或二段可见部分的新线段代替原来的线段。

以正六面体为例，有如下四种情况：

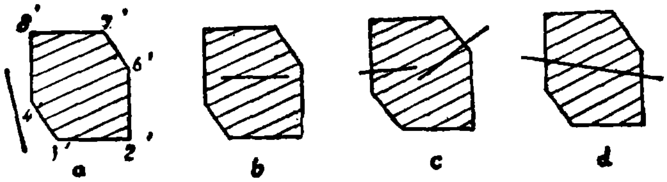



图 4　线段与投影多边形的关系

阴影部分为空间物体经过投影后在投影平面上占据的一平面区域，物体上任何一点均落在此平面区域内。1′2′6′7′8′4′我们称为物体的投影多边形。

图 4—$a$ 为线段与物体投影不重叠，则线段不被遮挡，即为整个可见线段。

图 4—$b$ 为线段与物体投影完全重叠。这种情况下，如果线段在物体之前或前表面（即可见表面）上，则为整个可见线段，否则为整个不可见线段。完全重叠是线段被物体遮挡的必要条件。

图 4—$c$，4—$d$ 为线段与物体投影部分重叠。这种情况下，线段有可能部分可见，也有可能整个可见。

对于图 4 的 $b$、$c$、$d$情形，线段是否被物体全部或部分遮挡，单在二维平面上还不能断定，必须依据空间的第三维坐标（深度坐标）才能确定。

具体判断方法如下：

用$\overline{p_0p_1}$表示线段表中的线段，$\overline{p_0p_1}$可表示为

$$P(s) = P_0 + (P_1 - P_0)s \tag{11}$$

这里 $0 \leqslant s \leqslant 1$，$P_0, P_1$ 为线段的两个端点。对任意 $s$（$-\infty < s < \infty$），$P(s)$ 就是线段$\overline{P_0P_1}$所在直线上的一点。

用$\overline{Q_0Q_1}$表示物体的棱边，$\overline{Q_0Q_1}$表示为

$$Q(e) = Q_0 + (Q_1 - Q_0)e \tag{12}$$

这里 $0 \leqslant e \leqslant 1$。当 $-\infty < e < \infty$时，为$\overline{Q_0Q_1}$所在直线。

用$P_j(s)$ 表示第 $j$ 条线段，$Q_i(e)$ 表示第 $i$ 条棱边。经过平行投影后，得到 $P_j(s)$ 的像 $P_j'(s)$，$Q_i(e)$的像$Q_i'(e)$。$P_j'(s)$ 与$Q_i'(e)$在投影平面上的交点分别用满足方程

$$P'_j(s_k) = Q_i(e_k)$$

的$s_k$，$e_k$来表示。具体地说，设$P_j'(s)$ 通过 $(u_0, v_0)$，$(u_1, v_1)$，$Q_j'(e)$ 通过 $(\zeta_0, \eta_0)$，$(\zeta_1, \eta_1)$，那么这两条直线的交点的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{X-u_0}{u_1-u_0} = \dfrac{Y-v_0}{v_1-v_0} \\ \dfrac{X-\zeta_0}{\zeta_1-\zeta_0} \quad \dfrac{Y-\zeta_0}{\eta_1-\eta_0} \end{cases} \tag{13}$$

这里 $\Delta = \begin{vmatrix} u_1-u_0 & v_1-v_0 \\ \zeta_1-\zeta_0 & \eta_1-\eta_0 \end{vmatrix}$

当 $det\triangle \neq 0$ 时

$$\begin{cases} s_k = \dfrac{(\eta_1-\eta_0)(\zeta_0-u_0)-(\zeta_1-\zeta_0)(\eta_0-v_0)}{det\Delta} \\ e_k = \dfrac{(v_1-v_0)(\zeta_0-u_0)-(u_1-u_0)(\eta_0-v_0)}{det\Delta} \end{cases} \tag{14}$$

对于某一线段，用公式（14）来求出该线段的像与所有棱边的像在投影平面上的全部$s_i$和$e_i$（$i=1, 2, \cdots, N, N$为棱边总数)，并求出

$$\begin{cases} e_J = \min\limits_i e_i \\ e_K = \max\limits_i e_i \\ s_J = \min\limits_i s_i \\ s_K = \max\limits_i s_i \end{cases} \tag{15}$$

(1) 如果$e_J > 1$或$e_K < 0$，则该线段与所有棱边都没有交点，故此线段整个可见。

(2) 如果$0 \leqslant e_J \leqslant c_K \leqslant 1$，再进一步作如下的判断：

(i) 如果$s_J \geqslant 1$或$s_K \leqslant 0$，则此线段为整个可见。

(ii) 如不是(i)的情况，就是有重叠的现象出现，这时定义

$$\overline{s_J} = \begin{cases} s_J & 0 \leqslant s_J < 1 \\ 0 & s_T < 0 \end{cases}$$

$$\overline{s_K} = \begin{cases} s_K & 0 < s_K \leqslant 1 \\ 1 & s_K > 1 \end{cases}$$

(*a*) 如果$\overline{s_J} = \overline{s_K}$，则整个线段是可见的。当物体是一个平面多边形而经投影变换后退化成一条直线时就发生这种情况。

(*b*) 如果不是(*a*)的情况，我们定义

$$d_J = d(s_J) = P_z(s_J) - Q_z(e_J)$$

$$d_K = d(s_K) = P_z(s_K) - Q_z(e_K)$$

式中下标$z$表示取$z$坐标。从而可以求得

$$\left.\begin{aligned} \overline{d_J} = d(\overline{s_J}) \\ \overline{d_K} = d(\overline{s_K}) \end{aligned}\right\}$$

如果$\overline{d_J} > 0$且$\overline{d_K} > 0$或者$\overline{d_J} = 0$且$\overline{d_K} > 0$或者$\overline{d_J} > 0$且$\overline{d_K} = 0$，则整个线段是可见的；

如果$\overline{d_J}=0$且$\overline{d_K}=0$，表示线段在物体表面上，这时对于该线段用公式

$$d_i=P_z(s_i)-Q_z(e_i)$$

计算相对于所有棱边的$d_i$，再求出

$$d_{min}=\min_i d_i$$

只有当$d_{min}\geqslant 0$时，此线段才是可见的；

其他情况下，线段就有被全部遮挡或部分遮挡的现象出现：

若$\overline{s_J}=0$且$\overline{s_K}=1$，整个线段被遮挡，这时该线段将从线段表中消去。

若$\overline{s_J}=0$，线段部分被遮挡，用可见部分$\overline{P(\overline{s_K})P_1}$代替原线段$\overline{P_0P}$。

若$\overline{s_K}=1$‘线段部分被遮挡，用可见部分$\overline{P_0P(\overline{s_J})}$代替原线$\overline{P_0P_1}$。

若$0<\overline{s_J}<\overline{s_K}<1$，线段部分被遮挡，用可见部分 $\overline{P_0P(\overline{s_J})}$和 $\overline{P(\overline{s_K})P_1}$代替原线段$\overline{P_0P_1}$。

## 四、一般物体消隐三维立体图的绘制及几个例图

一般物体多数不是单个的凸多面体，而上面的讨论是对凸多面体而言。这种情况时，就要把物体分解成几个凸多面体来处理。分解后再生成每个凸多面体的线段表、棱边表和相应的点列关系表。这里要注意的是可能出现一个凸多面体的部分线段或棱边被另一个凸多面体遮挡的情形，这时要把前一个凸多面体的这部分棱边和线段加入到后一个凸多面体的线段表中去处理。

例图1是由二个凸多面体组成的物体，例图2是由三个凸多面体组成的物体，例图3是由八个凸多面体组成的物体。

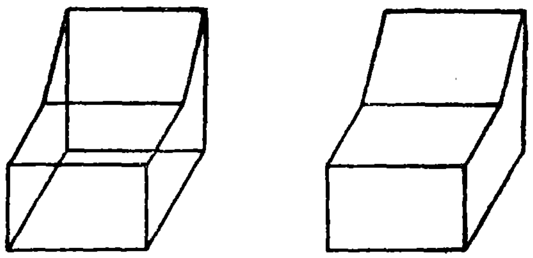


图5　未消隐的平行投影图　　　　消隐后的平行投影图

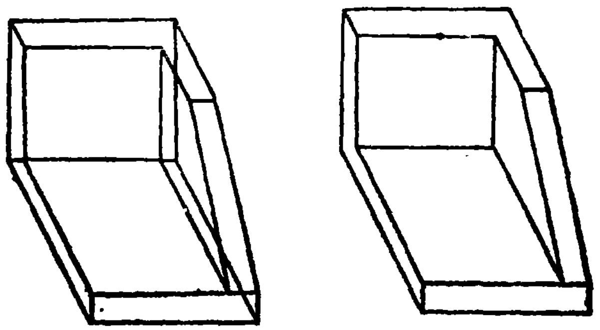


图6　未消隐的平行投影图　　　　消隐后的平行投影图

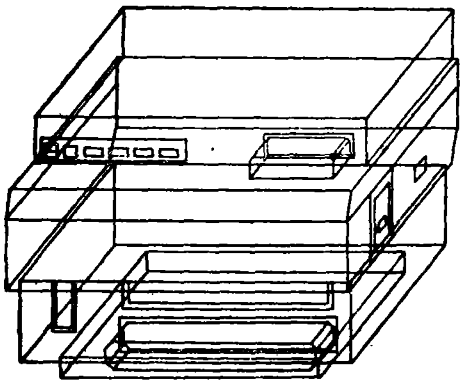
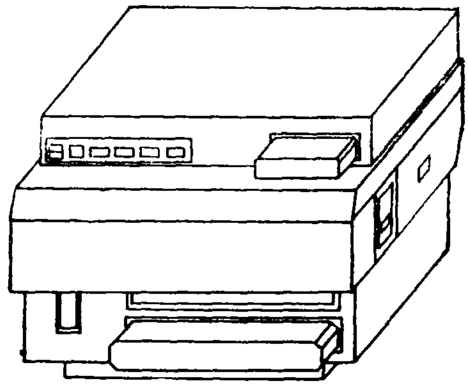
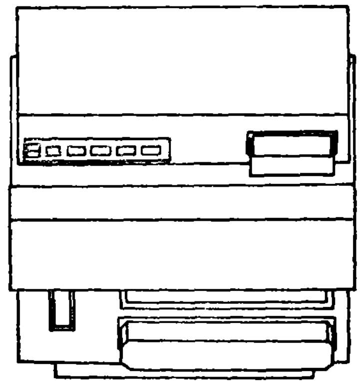


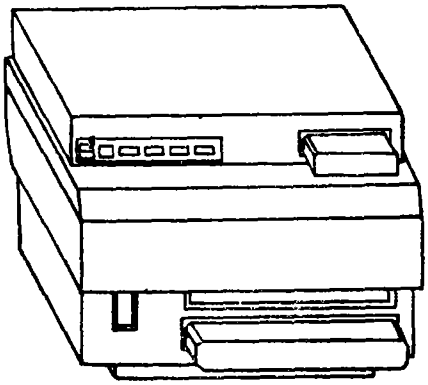
图 7 未消隐的平行投影图（顺时针旋转60°）



消隐后的平行投影图（顺时针旋转60°）



消隐后的平行投影图（正面投影）



消隐后的平行投影图（逆时针旋转30°）

## 参 考 文 献


[1] 杨学平；计算机绘图，电力工业出版社，1980. 2

[2] 任正凡等；计算机绘图及图形显示，湖南科学技术出版社，1 9 8 3，7

[3] 何援军；消去隐藏线的直线图形绘制，中国船舶工业总公司应用软件开发中心，1 9 8 4，8

[4] コンピュータによる自動製図システム，日本図学会コンピュータグラフイクス委員会編，東京日刊工業新聞社，1974

[5] J.G, Griffths; Eliminating hidden edges in line drawings, CAO, 1 9 7 9, Vol 11, No2 (March Aided Des.), 77—78

[6] 吉川弘之；コンピュータグラフィック論，日科技連出版社，1977，8

# Draw Line Stereograph of Eliminating Hidden-Line

Gao penchen

**Abstract**

This paper describes following several problems. The first one is that two-dimension plane can be used to express straight three-dimension stereogram. Another one is that we can use projecting conyerse formula to draw stereogram. This paper also presents data structure and calculus which can etiminate hidden-line and graphical example.

A very simple data relation table has been listed in thispaper. specially, author discusses a technigue of eliminating hidde-line cleanly, so it is easy to understand. progra and apply.